Nafouz

التمرين الأول(04ن)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل:

السؤال:	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1) حلول المعادلة التفاضلية $y'-2y=1$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ:	$x\mapsto ce^{-2x}+\frac{1}{2}$ مع $c\in\mathbb{R}$	$x\mapsto ce^{2x}-\frac{1}{2}$ مع $c\in\mathbb{R}$	$x\mapsto ce^{\frac{1}{2}x}-2$ مع $c\in\mathbb{R}$
2) القيمة المتوسطة m للدالة f المعرفة على المجال $[2;3]$ بالعبارة $f(x)=e^{2x+3}-x$ تساوي:	$m=\frac{1}{2}(e^9-e^7-5)$	$m=e^2-\frac{5}{2}$	$m=\frac{1}{2}(e^2-5)$
3) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>2$ يكون: $C_{n-1}^2+C_n^2$ يساوي:	$\frac{1}{2}(n-1)^2$	$(n-1)^2$	n^2-2n
4) عبارة الحد العام U_n للمتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بِـ: $u_n=\int_0^n 2^x\ln 2\,dx$ هي:	2^n	2^n+1	2^n-1

التمرين الثاني(05ن)

I) المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول $u_0=6$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}$

1) أ. في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، مثّل المستقيمين (Δ) و (D) إذا علمت أن: $(\Delta):y=x$ و $(D):y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

ب. مثّل و دون حساب على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n>-\frac{2}{3}$

3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

II) المتتالية العددية (v_n) معرفة على N بحدها العام V_n: حيث من أجل كل n من N $v_n=u_n+\alpha$ ، α عدد حقيقي.

1) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$، ثم أحسب حدها الأول.

2) نضع $\alpha=\frac{2}{3}$: أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n. استنتج عبارة u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثالث (04ن)

نعتبر صندوقين أحدهما U يحتوي على **3** كرات خضراء و **4** كرات حمراء و الآخر U' يحتوي على **كرتين** خضراوين و **5** كرات حمراء، كل الكرات لا نميز بينها باللمس، نرمز للكرات الخضراء بالرمز V و للكرات الحمراء بالرمز R.

I - نسحب عشوائيا من الصندوق U ثلاث كرات في آن واحد. أحسب احتمال كلّ من الحوادث A ، B و C التالية:

◄ A : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون ". ◄ B : " الحصول على كرة خضراء واحدة بالضبط ".

◄ C : " الحصول على كرة حمراء على الأقل ".

II -نختار بطريقة عشوائية صندوقا من بين الصندوقين و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا:

1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية.

2) بيّن أنّ احتمال الحصول على كرة خضراء هو: $P(V)=\dfrac{5}{14}$

3) إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء فما احتمال أن تكون من الصندوق U ؟.

التمرين الرابع(07ن)

يُنسب المستوي إلى المعلم المتعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=1\,cm$ و $\|\vec{j}\|=4\,cm$

I - الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ (**يطلب منك حساب النهايات**)، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1{,}8<\alpha<2$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II -الدالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$ و (C_f) هو تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}.

4) عيّن إحداثيّي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثمّ أنشئ المنحنى (C_f).

III - الدالة العددية G معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $G(x)=\dfrac{5}{9}x^3+x-\dfrac{2}{3}x^3\ln x$

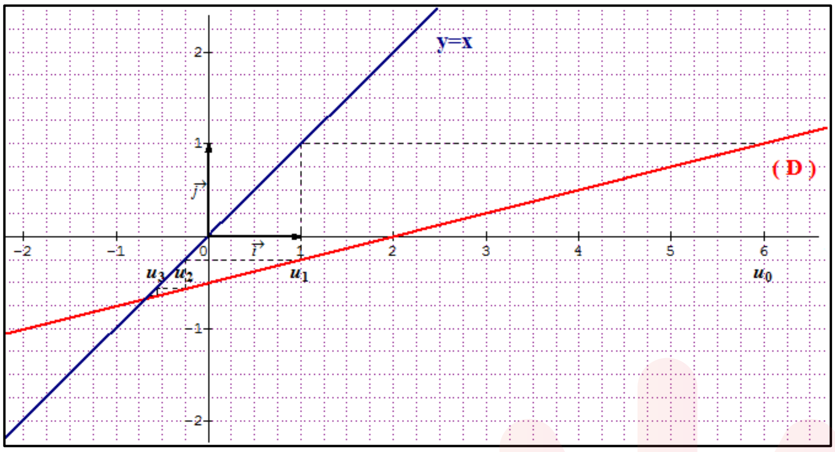
1) بيّن أنّ الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) أحسب بدلالة العدد α A_α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلاتهما $x=1$ و $x=\alpha$. حيث (C_g) هو المنحنى البياني الممثل للدالة g في المعلم السابق.

التصحيح النموذجي المختصر لامتحان البكالوريا التجريبية دورة ماي 2022:	التنقيط:
حل التمرين الأول: (04 نقاط)	
▪ إختيار الإجابة الصحيحة مع التعليل:	
1) الإجابة ب)	0,25
التعليل: المعادلة التفاضلية $y'-2y=1$ تكافئ $y'=2y+1$ و هي من الشكل $y'=ay+b$ حيث $a=2$ و $b=1$ و عليه فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'-2y=1$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ: $x\mapsto ce^{ax}-\frac{b}{a}$ مع $c\in\mathbb{R}$ بالتعويض نجد $x\mapsto ce^{2x}-\frac{1}{2}$ مع $c\in\mathbb{R}$	0,75
2) الإجابة أ)	0,25
التعليل: لدينا القيمة المتوسطة m للدالة f المعرفة على المجال $[2;3]$ بالعبارة $f(x)=e^{2x+3}-x$ هي: $m=\int_a^b f(x)\,dx$ بالتعويض نجد: $m=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3\left(e^{2x+3}-x\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x+3}-\frac{1}{2}x^2\right]_2^3=\frac{1}{2}\left(e^9-e^7-5\right)$	0,75
3) الإجابة ب)	0,25
التعليل: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>2$ يكون: $C_{n-1}^2+C_n^2=\frac{(n-1)!}{2!\times(n-1-2)!}+\frac{n!}{2!\times(n-2)!}=\frac{(n-1)!}{2\times(n-3)!}+\frac{n!}{2\times(n-2)!}$ يكافئ $C_{n-1}^2+C_n^2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)(2n-2)}{2}=(n-1)^2$	0,75
4) الإجابة ج)	0,25
التعليل: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\int_0^n 2^x\ln 2\,dx=\int_0^n \ln 2\,e^{x\ln 2}\,dx=\left[e^{x\ln 2}\right]_0^n=2^n-1$	0,75

حل التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) تمثيل المستقيمان و الحدود:



0,25

0,75

2) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n > -\frac{2}{3}$ .... $p(n)$

أ- مرحلة التحقق: نتحقق من صحة الخاصية p من أجل $n_0 = 0$

لدينا $u_0 = 6$ و بما أن $6 > -\frac{2}{3}$ معناه $u_0 > -\frac{2}{3}$ ما يعني أن الخاصية p صحيحة من أجل $n_0 = 0$. 0,25

ب- مرحلة الوراثة: نفرض أن الخاصية p صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n معناه $u_n > -\frac{2}{3}$ 0,25

و نبرهن صحة الخاصية p من أجل $(n+1)$ أي البرهان أن $u_{n+1} > -\frac{2}{3}$

الصفحة 2

لدينا $u_n > -\frac{2}{3}$ يكافئ $\frac{1}{4}u_n > -\frac{1}{6}$ يكافئ $u_{n+1} > -\frac{4}{6}$ يكافئ $u_{n+1} > -\frac{2}{3}$ 0,25

ما يعني أن الخاصية p صحيحة من أجل $(n+1)$.

▪ الإستنتاج: نستنتج حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_n > -\frac{2}{3}$ 0,25

3) لنبيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} - u_n = -\frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right)$ 0,25

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -\frac{2}{3}$ يكافئ $u_n + \frac{2}{3} > 0$ يكافئ $-\frac{3}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) < 0$ 0,25

يكافئ $u_{n+1} - u_n < 0$ ما يعني أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

• إستنتاج التقارب: بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد $-\frac{2}{3}$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة. 0,5

I - المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1) تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} + \alpha = \frac{1}{4}\left(u_n - 2 + 4\alpha\right)$

من جهة أخرى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: 0,5

بالمطابقة مع $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ نجد $v_{n+1}=\frac{1}{4}(u_n-2+4\alpha)$ نجد $v_n=u_n-2+4\alpha$

يكافئ $u_n+\alpha=u_n-2+4\alpha$ يكافئ $\alpha=-2+4\alpha$ يكافئ $-3\alpha=-2$ يكافئ $\alpha=\frac{2}{3}$

- حساب حدها الأول: لدينا $v_0=u_0+\alpha=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$ معناه $v_0=\frac{20}{3}$ 0,25

2) أ . الكتابة بدلالة n عبارة الحد العام v_n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n$ بالتعويض نجد $v_n=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ معناه $v_n=\frac{20}{3\times 4^n}$ 0,5

ب. استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+\alpha$

يكافئ $u_n=v_n-\alpha$ يكافئ $u_n=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}$ يكافئ $u_n=\frac{2}{3}\left(\frac{10}{4^n}-1\right)$ 0,5

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$ لأن $-1<\frac{1}{4}<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ 0,25

حل التمرين الثالث (04 نقاط)

I - حساب احتمال كلّ من الحوادث A ، B و C:

الصفحة 3

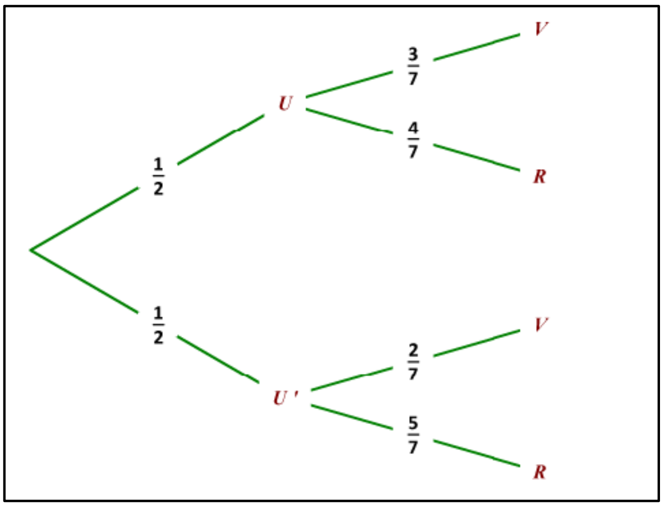
◄ لدينا $P(A)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_7^3}=\frac{5}{35}$ معناه $P(A)=\frac{1}{7}$ 0,5

◄ لدينا $P(B)=\frac{C_3^1\times C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$ معناه $P(B)=\frac{18}{35}$ 0,5

◄ لدينا $P(C)=\frac{C_4^1\times C_3^2+C_4^2\times C_3^1+C_4^3}{C_7^3}=\frac{34}{35}$ معناه $P(C)=\frac{34}{35}$ 0,5

II - نختار صندوقا عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا:

1) إنجاز شجرة الإحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية: 01



2) لنبيّن أنّ احتمال الحصول على كرة خضراء هو $P(V)=\dfrac{5}{14}$:

لدينا $P(V)=P(U\cap V)+P(U'\cap V)$ يكافئ $P(V)=P(U)\times P_U(V)+P(U')\times P_{U'}(V)$ 0,5

بالتعويض نجد $P(V)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{7}$ ما يعني أن $P(V)=\dfrac{5}{14}$ 0,25

3) حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق U علما أنها خضراء اللون:

لدينا $P_V(U)=\dfrac{P(U\cap V)}{P(U)}=\dfrac{P(U)\times P_U(V)}{P(U)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}}{\frac{5}{14}}==\dfrac{\frac{3}{14}}{\frac{5}{14}}=\dfrac{3}{14}\times\dfrac{14}{5}=\dfrac{3}{5}$ معناه أن $P_V(U)=\dfrac{3}{5}$ 0,75

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - الدالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة:

x	0 1 $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$

$$g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$$

1) دراسة تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

النهايات: لدينا $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(1+x^2-2x^2\ln x\right)=1$ 0,25

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+x^2-2x^2\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)\right]=-\infty$$ 0,25

0,25

المشتقة: الدالة العددية g معرّفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ تكون: 0,25

$g'(x)=2x-2\left(2x\times\ln x+\dfrac{1}{x}\times x^2\right)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$ معناه $g'(x)=-4x\ln x$

إشارة المشتقة: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $4x>0$

و عليه فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة العبارة $-\ln x$ معناه أن: 0,25

إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ 0,25

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1 ↗	2	↘ $-\infty$

2) لنبيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1,8<\alpha<2$: 0,25

لدينا الدالة g معرفة و مستمرة و رتيبة (متناقصة تماما) على المجال $[1;+\infty[$ 0,25

إذا بالضرورة فإن الدالة g معرفة و مستمرة و رتيبة (متناقصة تماما) على المجال $[1,8\,;2]$.

و لدينا $g(1,8)\simeq 0,43$ و $g(2)\simeq -0,55$ و بما أن $g(1,8)\times g(2)<0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8<\alpha<2$ مع $g(\alpha)=0$. 0,25

▪ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

- II 0,25

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: 0,25

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\dfrac{\ln x}{1+x^2}\right) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(1+x^2\right)=1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(\ln x) = -\infty$

الصفحة 4

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{1+x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2 \times \dfrac{\ln x}{x^2}}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\dfrac{\ln x}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+1}\right) = 0$ 0,25 0,25

– التفسير الهندسي للنهايتين:

- لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ ما يعني أن المنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته $x=0$ هو حامل محور التراتيب.
- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ما يعني أن المنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y=0$ هو حامل محور الفواصل بجوار $+\infty$.

2) أ. لنبيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: 0,5

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$$

لدينا الدالة العددية f معرّفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ تكون: 0,25 0,25

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times\left(1+x^2\right) - 2x\times\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}+x-2x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x\left(\frac{1}{x}+x-2x\ln x\right)}{x\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x\left(1+x^2\right)^2} = \frac{g(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$$ 0,5

ب. استنتاج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\,0;+\infty\,[$: $x\left(1+x^2\right)^2 > 0$ و عليه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ما يعني أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\,0;\alpha\,]$ و متناقصة تماما على المجال $[\,\alpha;+\infty\,[$.

▪ تشكيل جدول تغيّرات الدالة f : 0,25

3) لنبيّن أنّ: $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$: لدينا $g(\alpha)=0$ يكافئ $1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha = 0$ يكافئ $\ln\alpha = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

و من جهة أخرى $f(\alpha) = \dfrac{\ln\alpha}{1+\alpha^2}$ بالتعويض نجد $f(\alpha) = \dfrac{\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}\times\dfrac{1}{1+\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$

▪ استنتاج حصر للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}: 0,25

لدينا $1{,}8 < \alpha < 2$ يكافئ $3{,}24 < \alpha^2 < 4$

يكافئ $6{,}48 < 2\alpha^2 < 8$ $\qquad \dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{2\alpha^2} < \dfrac{1}{6{,}48}$ 0,25

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

و عليه فإن حصر للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ الذي سعته 10^{-2} هو:

$0{,}13 < f(\alpha) < 0{,}15$

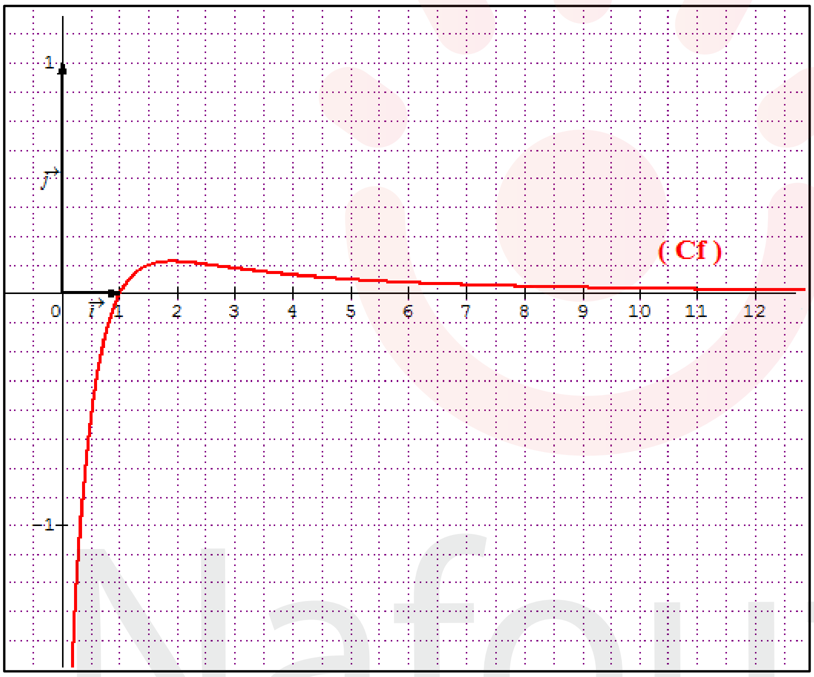
4) تعيين إحداثيّي نقطة تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع حامل محور الفواصل:

لدينا $f(x)=0$ تكافئ $\dfrac{\ln x}{1+x^2}=0$ تكافئ $\ln x=0$ تكافئ $x=1$.

- ما يعني أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $(1;0)$.

المنحنى $\left(C_f\right)$ 0,5

- إنشاء المنحنى $\left(C_f\right)$:



III -

1) لنبيّن أنّ الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

0,5

لدينا الدالة العددية G معرّفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ تكون:

0,25

$$G'(x)=\frac{5}{9}\times 3x^2+1-\frac{2}{3}\left(3x^2\ln x+x^3\times\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{3}x^2+1-2x^2\ln x-\frac{2}{3}x^2=1+x^2-2x^2\ln x$$

0,25

و عليه $G'(x)=g(x)$ ما يعني أن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) حساب بدلالة α العدد A_α: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;\alpha]$: $g(x)\geq 0$ و عليه فإن:

$$A_\alpha=\int_1^\alpha g(x)\,dx=\left[G(x)\right]_1^\alpha=G(\alpha)-G(1)$$ و لدينا $$G(\alpha)=\frac{5}{9}\alpha^3+\alpha-\frac{2}{3}\alpha^3\ln\alpha$$ و $$G(1)=\frac{14}{9}$$

و عليه $$A_\alpha=\frac{5}{9}\alpha^3+\alpha-\frac{2}{3}\alpha^3\ln\alpha-\frac{14}{9}\ \mu a$$